

# 6

## NIVELLEMENT INDIRECT

Il est intéressant d'étudier en détail cette technique puisque c'est le moyen de mesure utilisé par les stations totales. Il est donc appelé à se généraliser, même s'il reste moins précis sur les dénivelées que le nivellement direct.

### 1 PRINCIPE DU NIVELLEMENT INDIRECT TRIGONOMETRIQUE

Le nivellement indirect trigonométrique permet de déterminer la dénivelée  $\Delta H$  entre la station T d'un théodolite et un point P visé. Ceci est fait par la mesure de la distance inclinée suivant la ligne de visée  $Di$  et de l'angle zénithal (noté  $V$  sur la figure 6.1.).

À partir du schéma, on peut écrire que :

$$\Delta H_{TP} = ht + Di \cdot \cos V - hv$$

$\Delta H_{TP}$  est la dénivelée de T vers P.

$ht$  est la **hauteur de station** (ou hauteur des tourillons).

$hv$  est la **hauteur de voyant** ou plus généralement la **hauteur visée** au-dessus du point cherché (on peut aussi poser une mire en P).

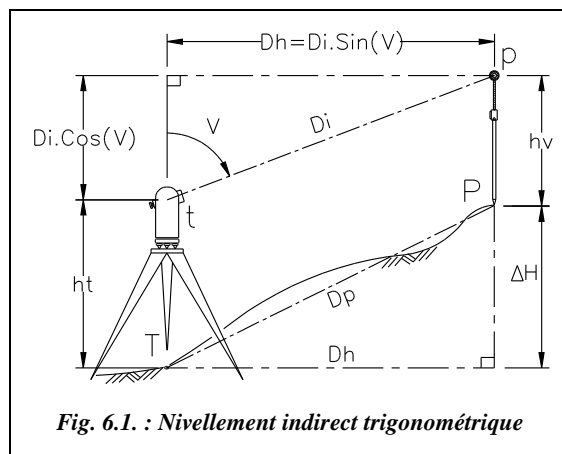


Fig. 6.1. : Nivellement indirect trigonométrique

On en déduit la distance horizontale  $Dh$  :

$$Dh_{TP} = Di \cdot \sin V$$

On en déduit la distance suivant la pente  $Dp$  :

$$Dp = \sqrt{\Delta H^2 + Dh^2}$$

### Remarque

- Le terme  $Di \cdot \cos V$  est appelé « dénivelée instrumentale ». Il est noté  $\Delta h_i$ . C'est la dénivelée entre l'axe des tourillons (t) du théodolite et le point p visé.
- $Dh$  ne dépend pas de  $h_v$  et  $h_t$  : elle n'est fonction que de  $Di$  et de  $V$ .
- L'appellation « trigonométrique » vient des calculs de trigonométrie simples donnant  $\Delta H$  et  $Dh$ .

## 2 NIVELLEMENT INDIRECT GÉODÉSIQUE

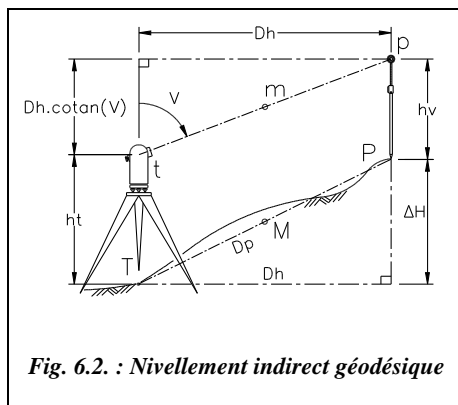


Fig. 6.2. : Nivellement indirect géodésique

Ce type de nivellement permet la détermination de la dénivelée entre le point de station T et un point P visé à partir de la connaissance des coordonnées planimétriques de T et P et de la mesure de l'angle vertical  $V$  (fig. 6.2.).

La distance horizontale  $Dh$  est déduite des coordonnées de T et P comme suit :

$$Dr = \sqrt{(E_T - E_P)^2 + (N_T - N_P)^2}$$

$$Do = Dr - Cr = \frac{Dr}{1 + kr} \approx Dr \cdot (1 - kr)$$

$$Dh_T = Do \cdot \left(1 + \frac{h_T}{R_N}\right)$$

$Dh_T$  est la distance horizontale entre T et P réduite à la station T.

$h_T$  est la hauteur du point de station au-dessus de l'ellipsoïde (voir l'exemple de calcul complet au chapitre 4 paragraphe 7.).

$R_N \approx 6\,380$  km en France.

La dénivelée instrumentale  $\Delta h_i$  vaut :

$$\Delta h_i = \frac{Dh_T}{\tan V} = Dh_T \cdot \cotan V$$

La dénivelée cherchée de T vers P vaut donc :

$$\Delta H_{TP} = h_t + Dh_T \cdot \cotan V - h_v$$

### 3 COMPARAISON AVEC LE NIVELLEMENT DIRECT

Les avantages du nivellement indirect par rapport au nivellement direct sont les suivants :

- on peut faire du nivellement indirect en terrain à forte pente sans multiplier le nombre des stations contrairement au nivellement direct ;
- la mesure de la dénivelée est faite en station sur le point connu, ce qui peut faire gagner du temps lors d'un cheminement ou lors d'un lever de détails par rayonnement puisqu'on obtient directement l'altitude des points visés outre leurs coordonnées en planimétrie ;
- si l'on utilise un théodolite électronique, on peut faire des visées très longues, de plusieurs kilomètres, ce qui n'est pas possible en nivellement direct, une lecture sur mire à 100 m étant déjà difficile.

**Les inconvénients du nivellement indirect par rapport au nivellement direct sont les suivants :**

- sur un chantier, pour obtenir une simple dénivelée en vue d'une vérification ou d'une implantation, le niveau reste plus simple et plus rapide à mettre en station et surtout plus facile à maîtriser par des non spécialistes ;
- les longues portées obligent à prendre en compte les erreurs dues à la sphéricité terrestre, à la réfraction atmosphérique, et les corrections de réduction à l'ellipsoïde. Mais l'informatique remédie à cet inconvénient en fournissant directement les données corrigées de ces erreurs. Seul le nivellement direct de précision permet d'obtenir des précisions millimétriques sur les dénivelées. La précision des instruments de mesure électronique des longueurs des stations modernes (IMEL) permet d'approcher la précision du centimètre sur la dénivelée sur des portées de l'ordre du kilomètre.

**Comparons les précisions théoriques obtenues en nivellement direct et indirect :**

- En nivellement **direct ordinaire** avec un niveau de chantier (type NA28), l'écart type sur 1 km de nivellement double est de  $\pm 1,5$  mm.
- En nivellement **direct de précision** avec un niveau de type NA2, micromètre et mire Invar, l'écart type sur 1 km de nivellement double est de  $\pm 0,3$  mm.
- En nivellement **indirect trigonométrique** (plutôt utilisé en canevas polygonal), avec une station totale, par exemple une station TC1000 où :
  - l'écart type sur la mesure de  $V$  donné par le constructeur est  $\sigma_v = \pm 1$  mgon ;
  - l'écart type sur une mesure de distance est  $\sigma_{Di} = \pm 1$  cm sur 1 km ;
  - l'écart type sur la mesure de la hauteur de station est  $\sigma_{ht} = \pm 2$  mm ;
  - l'écart type sur la mesure de la hauteur de voyant est  $\sigma_{hv} = \pm 2$  mm.

l'écart type sur la mesure de la dénivelée est obtenu à partir de la formule donnant la dénivelée  $\Delta H$  par :  $\sigma_{\Delta H}^2 = \sigma_{ht}^2 + \sigma_{hv}^2 + (\sigma_{Di} \cdot \cos V)^2 + (\sigma_{Vrad} \cdot Di \cdot \sin V)^2$  ce qui donne pour une distance  $Dh$  de 1 km et un angle  $V$  de 80 gon :  $\sigma_{\Delta Hmaxi} \approx \pm 16$  mm.

- En nivellement **indirect géodésique** (plutôt utilisé en canevas d'ensemble), avec un écart type sur  $Dh$  :  
 $\sigma_{Dh} = \pm 4 / 2,7 = \pm 1,5$  cm en canevas de précision,  
 $\sigma_{Dh} = \pm 20 / 2,7 = \pm 7,4$  cm en canevas ordinaire.

L'écart type sur la dénivelée  $\Delta H$  est, avec un théodolite T2 par exemple où l'écart type sur la mesure de  $V$  donné par le constructeur est  $\sigma_V = \pm 2,5$  dmgon est donné par :  $\sigma_{\Delta H}^2 = \sigma_{ht}^2 + \sigma_{hv}^2 + (\sigma_{Dh} \cot V)^2 + [Dh (1 + \cot^2 V) \sigma_{Vrad}]^2$  soit, pour une distance  $Dh$  de 1 km et un angle  $V$  de 80 gon :

$$\sigma_{\Delta Hmaxi} \approx \pm 18 \text{ mm en canevas de précision,}$$

$$\sigma_{\Delta Hmaxi} \approx \pm 30 \text{ mm en canevas ordinaire.}$$

Il faut ajouter à ces valeurs l'incertitude sur le terme de correction de l'erreur de niveau apparent (voir § 5 et 9).

La précision en nivellement direct est donc toujours meilleure, avec les réserves suivantes :

- le nivellement direct utilisé est un nivellement double (long et coûteux) ;
- la précision du nivellement indirect peut être améliorée par visées réciproques ( $\pm 16 / \sqrt{2} \approx \pm 11$  mm), ce qui peut être suffisant suivant le type de travaux à effectuer.

On peut conclure à partir des formules donnant les écarts types sur  $\Delta H$  que :

- plus la distance de visée est importante, plus la lecture sur  $V$  doit être soignée ;
- plus la visée est inclinée et plus la mesure de  $Di$  doit être soignée.

## 4 NIVELLEMENT INDIRECT SUR COURTE PORTÉE

Une portée est dite courte si sa longueur (distance horizontale  $Dh$ ) est inférieure à 500 m.

### 4.1 Nivellement indirect avec un théodolite optico-mécanique

Sur de très courtes portées ( $Dh < 100$  m), on peut effectuer un nivellement indirect avec un théodolite optico-mécanique, une chaîne et une mire. La précision obtenue est médiocre (voir calculs § 4.1.1) mais peut être suffisante dans certains cas, par exemple, pour le calcul d'altitudes approchées pour un avant-projet de terrassement.

#### 4.1.1 Cas où la distance suivant la pente $Dp$ est mesurable

C'est le cas si le terrain présente une pente régulière entre S et A (fig. 6.3.). On peut alors mesurer directement la distance  $Dp$  à la chaîne avec une précision correcte (voir estimation ci-après).

**La méthode est la suivante** : depuis le théodolite stationné en S, l'opérateur vise la mire en interceptant la graduation correspondante à la hauteur des tourillons  $ht$  de sorte que la visée soit parallèle à la droite SA dont l'opérateur a mesuré la longueur  $Dp$ . Il lit l'angle  $V$  correspondant, il mesure  $Dp$  et en déduit que :

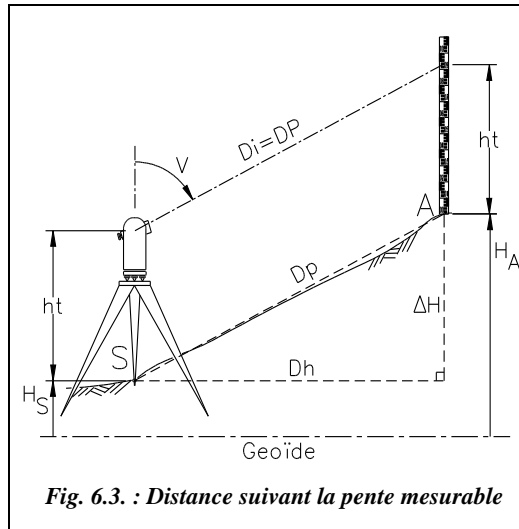


Fig. 6.3. : Distance suivant la pente mesurable

$$Dh = Dp \cdot \sin V$$

$$\Delta H = Dp \cdot \cos V$$

$$H_A = H_S + \Delta H$$

**La précision** espérée sur  $\Delta H$  se calcule comme suit :

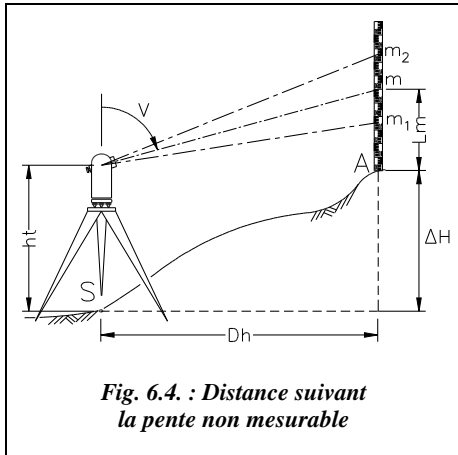
on revient à la formule générale pour tenir compte de la mesure de  $ht$  et de la lecture  $hv$  sur la mire. L'écart type sur la dénivelée vaut :

$$\sigma_{\Delta H}^2 = \sigma_{ht}^2 + \sigma_{hv}^2 + (Dp \cdot \sin V \cdot \sigma_{V \text{ rad}})^2 + (\sigma_{Dp} \cdot \cos V)^2;$$

- l'on peut estimer connaître  $ht$  à  $\pm 2$  mm près ;
- l'on peut estimer faire une erreur de  $\pm 2,5$  mm sur le pointé de  $hv$  sur la mire à une distance d'environ 100 m ;
- si on utilise un T16, l'écart type sur la mesure de  $V$  est de l'ordre de  $\pm 2,5$  mgon (valeur usuelle) ;
- l'écart type sur la mesure d'une distance  $Dp$  de l'ordre de 100 m à la chaîne est au mieux de  $\pm 10$  mm.

Pour une distance  $Dp$  de l'ordre de 100 m et un angle  $V$  de l'ordre de 90 gon, on obtient :  $\sigma_{\Delta H} \approx \pm 5$  mm. Cette précision est largement suffisante pour les travaux courants. Elle dépend essentiellement de la précision du mesurage de  $Dp$ .

### 4.1.2 Cas où si la distance suivant la pente $Dp$ n'est pas mesurable



C'est le cas si la pente est irrégulière, sur un terrain fortement bosselé, par exemple, s'il y a des obstacles, etc.

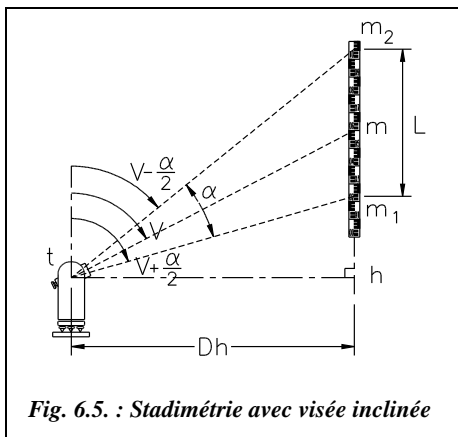
#### 4.1.2.1 Méthode

Il faut calculer la distance horizontale  $Dh$  de la station  $S$  à partir des lectures sur une mire posée en  $A$  (fig. 6.4.). Sur un tachéomètre optico-mécanique, ceci peut être effectué par stadimétrie avec une précision médiocre (voir stadimétrie en nivellement direct, chapitre 5).

On détermine  $Dh$  par stadimétrie à partir des lectures  $m_1$ ,  $m_2$  et  $V$ .

La dénivellée  $\Delta H$  est ensuite déterminée par :  $\Delta H = ht + Dh \cdot \cotan V - Lm$

$Dh \cdot \cot V$  étant la dénivellée instrumentale notée  $\Delta hi$ .



Or, on cherche à calculer  $Dh$  en fonction des lectures  $m_1$  et  $m_2$  sur les fils stadimétriques (fig. 6.5.).

**Rappel** (voir le chapitre 5, § 1.2.6) :

$\alpha$  est l'angle stadimétrique ; la constante stadimétrique correspondante est :

$$K = \frac{1}{2 \tan(\alpha/2)} \approx 100$$

Soit  $L$  la longueur interceptée sur la mire, on a :  $L = hm_2 - hm_1$

$$\text{soit : } L = Dh \cdot \left[ \frac{1}{\tan(V - \alpha/2)} - \frac{1}{\tan(V + \alpha/2)} \right]$$

$$\text{donc : } L = Dh \cdot \left[ \frac{1 + \tan(V) \cdot \tan(\alpha/2)}{\tan(V) - \tan(\alpha/2)} - \frac{1 - \tan(V) \cdot \tan(\alpha/2)}{\tan(V) + \tan(\alpha/2)} \right]$$

$$\text{enfin : } \frac{L}{Dh} = \frac{2 \tan(\alpha/2) \cdot [1 + \tan^2 V]}{\tan^2 V - \tan^2(\alpha/2)} = \frac{\cotan^2 V + 1}{K[1 - \cotan^2 V \cdot \tan^2(\alpha/2)]}$$

Finalement, on obtient :

$$Dh = K \cdot L \cdot \sin^2 V \left[ 1 - \left( \frac{\cot V}{2K} \right)^2 \right] \text{ et } \Delta H = ht + D_h \cdot \cotan V - Lm$$

#### Remarque

Pour  $V = 100$  gon, on retrouve l'expression issue de la stadimétrie pour le nivellement direct  $Dh = K \cdot L$  où  $L$  est la longueur interceptée sur la mire.

Dans la pratique, cette expression est simplifiée en considérant que le terme  $\left( \frac{\cotan V}{2K} \right)^2$  est négligeable devant 1.  $V$  étant l'angle vertical lu sur une graduation quelconque de la mire, on obtient les expressions approchées employées ci-dessous :

$$Dh = K \cdot L \cdot \sin^2 V$$

$$\Delta H = ht + K \cdot L \cdot \sin V \cdot \cos V = K \cdot L \cdot \frac{\sin(2V)}{2} - Lm$$

Il existe d'autres méthodes qui sont abordées dans le chapitre 4.

#### 4.1.2.2 Vérification de la validité de cette approximation

Cette approximation revient à dire que, sur la mire (fig. 6.6.)  $H_1 H_2 \approx m_1 m_2 \cdot \sin V$ .

L'erreur commise sur la distance horizontale  $Dh$  par l'approximation précédente est de :

$$\left. \begin{aligned} \Delta Dh &= K \cdot L \cdot \sin^2 V \frac{\cotan^2 V}{4K^2} \\ L &= \frac{Dh}{K \cdot \sin^2 V \left( 1 - \frac{\cotan^2 V}{4K^2} \right)} \end{aligned} \right\} \Delta Dh = \frac{Dh}{(2K \tan V)^2 - 1}$$

Pour une distance horizontale de  $Dh = 100$  m, une erreur sur  $Dh$  de l'ordre du millimètre apparaît pour  $V = 64$  gon.

Compte tenu que la précision de lecture des graduations d'une mire à 30 m donne une incertitude inhérente à la

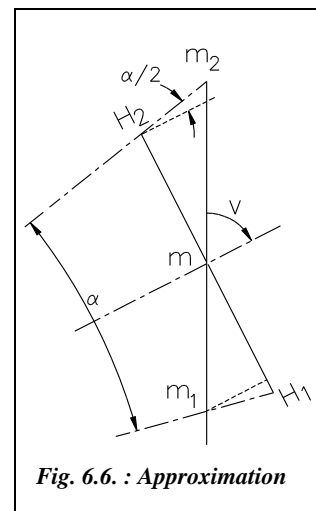


Fig. 6.6. : Approximation

stadimétrie de l'ordre de  $\pm 14$  cm, on peut considérer que l'approximation précédente est tout à fait justifiée, son influence sur le résultat étant négligeable devant celle de l'erreur de lecture sur mire.

**La précision espérée sur la connaissance de la dénivelée  $\Delta H$**  est calculée comme suit :

En dérivant l'expression simplifiée donnant  $\Delta H$  :  $\Delta H = ht + K.L \frac{\sin 2V}{2} - Lm$ , on obtient :

$$d(\Delta H) = K.L.\cos(2V).dV_{\text{rad}} + K.dL \frac{\sin(2V)}{2} + dht + dLm$$

et comme  $K.L.\sin^2 V = Dh$ , on obtient, en termes d'écart-type :

$$\sigma_{\Delta H}^2 = \left[ \frac{Dh \cdot \cos(2V)}{\sin^2 V} \sigma_{V_{\text{rad}}} \right]^2 + \sigma_{V_{\text{rad}}}^2 + \left[ K \cdot \sigma_L \frac{\sin(2V)}{2} \right]^2 + (dht)^2 + (dLm)^2$$

On peut estimer la précision de lecture sur mire à  $\pm 1$  mm jusqu'à 30 m de portée. Il faut deux lectures pour déterminer  $L$ , donc  $\sigma_L \approx \pm 1,4$  mm ( $1 \cdot \sqrt{2}$ ).

$K$  vaut généralement 100. Si l'on utilise un T16,  $\sigma_V \approx \pm 2,5$  mgon.

On obtient un écart type sur  $\Delta H$  de :

- 2 mm pour  $V = 100$  gon ;
- 2 cm pour  $V = 90$  gon,  $\Delta H \approx 4$  m ;
- 5 cm pour  $V = 75$  gon,  $\Delta H \approx 12$  m.

Pour une visée proche de l'horizontale, la précision obtenue reste donc correcte mais se dégrade au fur et à mesure que la visée s'incline.

#### Remarque

Voir les chapitres 5, § 1.2.6 et 4, § 4.1 au sujet de la précision sur la connaissance de la distance horizontale  $Dh$  par cette méthode.

Certains tachéomètres dits « autoréducteurs » permettent de lire directement cette distance grâce à un système de fils stadimétriques à espacement variable en fonction de l'inclinaison de l'optique, mais le principe de base restant la stadimétrie, la précision demeure médiocre et ne fournit qu'un ordre de grandeur de  $Dh$  ou  $\Delta H$ , (voir le chapitre 4, § 4.2).



## 4.2 Nivellement indirect avec un théodolite muni d'un IMEL

Il est possible de monter un instrument de mesure électronique des longueurs (IMEL) sur un théodolite classique. Par exemple le T16 ou le T2 peuvent être équipés d'un DI1600, distancemètre à infrarouge qui se monte sur la lunette ; le point de visée sur le réflecteur est alors décalé vers le bas pour tenir compte du décalage vertical entre l'optique de visée et le distancemètre. On peut aussi utiliser directement une station dont le distancemètre est intégré et coaxial à l'optique de visée, par exemple : optiques **coaxiales** des TC1000, TC1010.

L'IMEL permet de connaître la distance inclinée  $D_i$  avec précision. Par exemple, un DI1600 est donné par le constructeur Wild pour un écart type de  $\pm (3 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$  soit  **$\pm 5 \text{ mm}$  pour 1 km**.

Le principe de la mesure est alors celui décrit au paragraphe 1., figure 6.1. : l'appareil mesure et affiche  $D_i$ . Suivant le modèle, il peut aussi calculer et afficher  $Dh$ ,  $\Delta H$ , etc.<sup>1</sup>



## 5 NIVELLEMENT INDIRECT SUR DES PORTÉES MOYENNES

Les portées moyennes sont celles comprises entre 500 m et 1 500 m.

Pour des portées supérieures à 500 m, il faut tenir compte de deux erreurs systématiques dont l'influence ne peut plus être négligée : l'erreur due à la **sphéricité terrestre** et l'erreur due à la **réfraction atmosphérique**. Chacune de ces deux erreurs peut être corrigée séparément. Leur correction globale est appelée **correction de niveau apparent**. Cette correction est appliquée à la dénivelée ; elle est toujours positive.

Tous les raisonnements de ce paragraphe sont faits à partir de la dénivelée instrumentale  $\Delta h_i$  (voir définition § 1). La dénivelée réelle est obtenue ensuite à partir de la dénivelée instrumentale par la relation :

$$\Delta H = \Delta h_i + ht - hv$$

<sup>1</sup> Voir aussi le chapitre 7, paragraphe 3. sur les stations totales.

Les deux phénomènes seront étudiés séparément afin de détailler leur influence et leur importance respective. L'étude des deux phénomènes amène aux formules finales du paragraphe 5.3.

## 5.1 Sphéricité terrestre

Les surfaces de niveau terrestres ne sont pas planes. Localement, elles peuvent être assimilées à des sphères de rayon moyen  $(R_N + H)$  à l'altitude  $H$ . Cette « sphéricité » de la terre induit des erreurs lors d'une visée de nivellement indirect (fig. 6.7.).

### 5.1.1 Erreur sur la dénivelée instrumentale

L'opérateur doit mesurer la dénivelée instrumentale  $\Delta h_i$  mais, en fait, il mesure  $\Delta h'_i$  plus petite (fig. 6.7.). L'erreur commise est toujours négative et vaut :

$$s_{\Delta h} = -\frac{Dh^2}{2R_N} = \Delta h'_i - \Delta h_i \text{ où}$$

$Dh$  est la distance horizontale de visée  $Dh \approx Di \cdot \sin V$ ,

$R_N$  est le rayon moyen de la terre  $R_N \approx 6\,380 \text{ km}$ .

On admet que le rayon de courbure moyen du géoïde est très voisin de celui de l'ellipsoïde, puisque les ondulations du géoïde par rapport à l'ellipsoïde ne dépassent pas 14 m en France (voir chap. 2, § 6.1). La dénivelée instrumentale corrigée de la sphéricité vaut donc :

$$\Delta h_i = Di \cdot \cos V - s_{\Delta h} = Di \cdot \cos V + \frac{Di^2}{2R_N} \sin^2 V$$

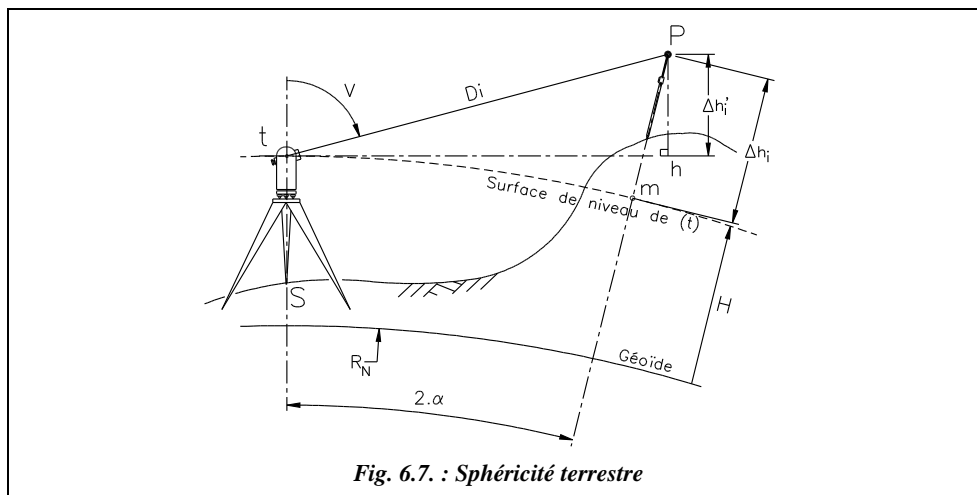


Fig. 6.7. : Sphéricité terrestre

### 5.1.2

À partir de la distance  $Di$  mesurée, la distance horizontale calculée est  $th = Di \cdot \sin V$  (fig. 6.7.) alors que la distance réelle est la longueur de l'arc  $tm$ , que l'on peut assimiler à la corde  $tm$  étant donnée la valeur de  $R_N$  par rapport à  $Di$ . L'erreur commise est positive si

$V < 100$  gon et négative si  $V > 100$  gon, elle vaut :  $s_{Dh} = \frac{Dh^2}{R_N} \cot V$ .

La distance horizontale corrigée de la sphéricité vaut :

$$Dh_t = Di \cdot \sin V - s_{Dh} = Di \cdot \sin V - \frac{Di^2}{R_N} \sin V \cdot \cos V$$

$Dh_t$  représente la distance horizontale réduite à l'horizon du point t. Du fait de la sphéricité terrestre, cette distance est différente si on la réduit à l'horizon du point visé P (voir fig. 6.8. et chap. 4, § 4.7).

### 5.1.3

### a) Application 1

Démontrez les expressions de  $s_{\Delta h}$  et  $s_{Dh}$  données aux paragraphes 5.1.1. et 5.1.2.

### Solution

Dans le triangle  $tmP$  (fig. 6.8.) on peut écrire :

$$\frac{Di}{\sin(100 + \alpha)} = \frac{Dh}{\sin(100 - i - 2\alpha)} = \frac{\Delta h_i}{\sin(i + \alpha)}$$

Dans le triangle  $tnP$ , on obtient de même :

$$\frac{Di}{\sin(100 - \alpha)} = \frac{Dh_p}{\sin(100 - i)} = \frac{\Delta h_i}{\sin(i + \alpha)}$$

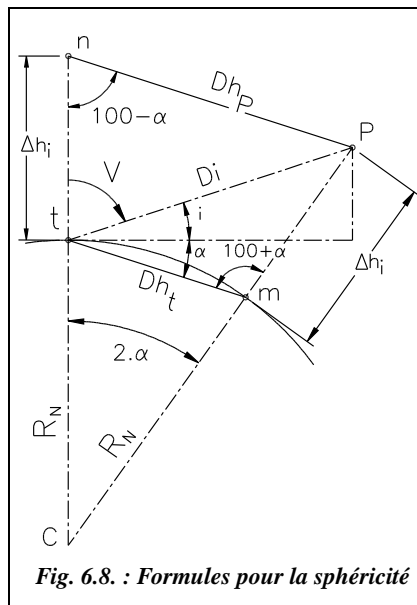
Cette dernière relation servira ultérieurement (voir § 6).

On détermine ensuite la **distance horizontale**, soit :

$$Dh_t = \frac{Di \cdot \cos(i + 2\alpha)}{\cos \alpha}$$

$$\text{donc : } Dh_t = Di \frac{\cos i \cdot \cos(2\alpha) - \sin i \cdot \sin 2\alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{enfin : } Dh_t = Di \left[ \cos i \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha} - \sin i \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} \right]$$



**Fig. 6.8. : Formules pour la sphéricité**

Après simplifications et en considérant que  $\cos \alpha \approx 1$ , on arrive à :

$$Dh_t = Di \cdot [\sin V - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos V]$$

On peut écrire :  $\sin \alpha = \frac{Dh_t}{2R_N}$  ;

Donc :

$$Dh_t = \frac{Di \cdot \sin V}{1 + \frac{Di \cdot \cos V}{R_N}} \approx Di \cdot \sin V \left[ 1 - \frac{Di \cdot \cos V}{R_N} \right] = Di \cdot \sin V - \frac{Di^2}{R_N} \sin V \cdot \cos V$$

On détermine ensuite la **dénivelée instrumentale**, c'est-à-dire :

$$\Delta h_i = \frac{Di \cdot \sin(i + \alpha)}{\cos \alpha} = Di \frac{\sin i \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos i}{\cos \alpha}$$

Avec  $\cos \alpha \approx 1$ , on obtient :  $\Delta h_i \approx Di [\cos V + \sin \alpha \cdot \sin V] = Di \left[ \cos V + \frac{Dh_t}{2R_N} \cdot \sin V \right]$

Donc, en considérant que  $Dh_t \approx Di \cdot \sin V$ , on obtient :  $\Delta h_i = Di \cdot \cos V + \frac{Di^2}{2R_N} \sin^2 V$

Ou encore, en utilisant l'expression complète de  $Dh_t$  :

$$\Delta h_i = Di \cdot \cos V + \frac{Di^2 \cdot \sin^2 V}{2(R_N + Di \cdot \cos V)} + \frac{Di^2 \cdot \sin^2 V}{2(R_N + Di \cdot \cos V)}.$$

#### b) Application 2

Évaluez la distance horizontale à partir de laquelle l'erreur de sphéricité sur la dénivelée dépasse 2 cm.

#### Réponse

$Dh \approx 505$  m. Pour cette distance, l'erreur sur  $Dh$  varie de 6,3 mm pour  $V = 90$  gon à 4 cm pour  $V = 50$  gon. Elle peut donc être négligée dans une mesure à la chaîne mais pas avec un IMEL (voir chap. 6, § 6).

#### c) Application 3

Donnez l'ordre de grandeur des erreurs dues à la sphéricité de la terre sur l'exemple suivant :  $Di = 3,5$  km,  $V = 90$  gon (notez que cela induit une dénivelée de l'ordre de 548 m).

#### Réponse

L'erreur de sphéricité est de :  $s_{\Delta h} = 937$  mm.

L'erreur sur la distance horizontale est de :  $s_{Dh} = 297$  mm.

**d) Application 4**

Donnez une démarche de calcul fournissant la valeur « exacte » c'est-à-dire sans approximation, des erreurs de sphéricité et évaluez les erreurs commises sur l'exemple précédent (voir § 5.1.3.3) en utilisant les formules approchées.

**Réponse (fig.6.8)**

$$s_{\Delta h} = \Delta h_i - Di \cdot \cos V = (CP - R_N) - Di \cdot \cos V,$$

$$CP^2 = R_N^2 + Di^2 - 2 \cdot R_N \cdot Di \cdot \cos(200 - V).$$

Sur l'exemple précédent, on obtient :  $s_{\Delta h} = 936$  mm soit un écart inférieur au millimètre.

De même, on peut calculer l'erreur sur la distance horizontale, soit :

$$s_{Dh} = Di \cdot \sin(V) - R_N \cdot 2\alpha_{\text{rad}}.$$

$$\alpha \text{ est calculé comme suit : } Di^2 = R_N^2 + (R_N + \Delta h_i)^2 - 2R_N \cdot (R_N + \Delta h_i) \cdot \cos(2\alpha)$$

Sur l'exemple précédent, la valeur de l'erreur est toujours la suivante :  $s_{Dh} = 297$  mm.

On peut donc conclure que, dans le cadre des mesures courantes, les formules donnant  $\Delta h_i$  et  $Dh$  sont suffisamment précises.

**e) Application 5**

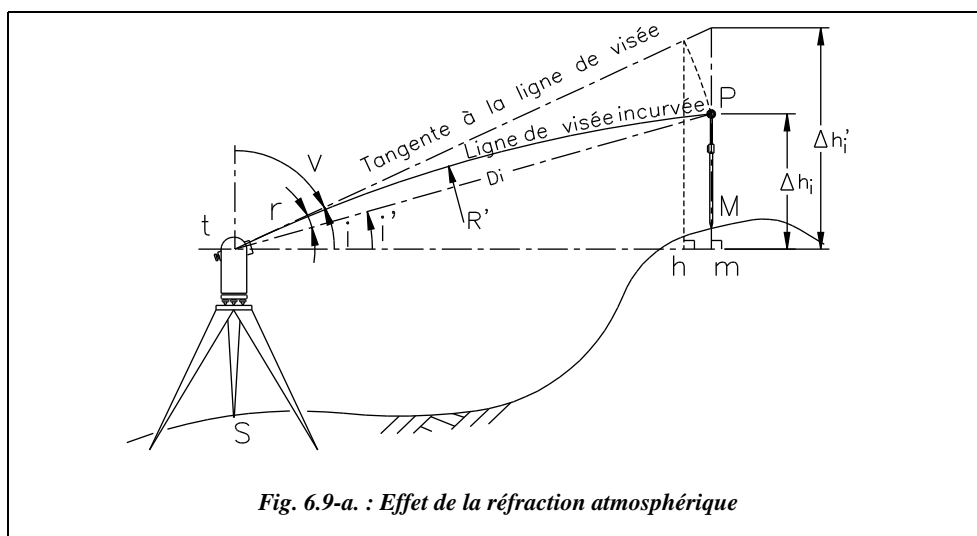
Donnez un ordre de grandeur de l'angle  $2\alpha$  entre la verticale du point de station et la verticale du point visé pour une distance horizontale de l'ordre de 3 km.

**Réponse**

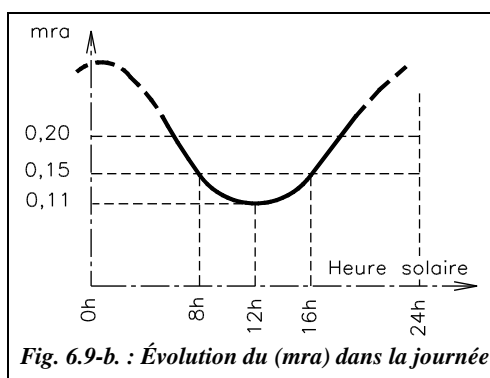
$2\alpha \approx 30$  mgon pour  $Dh = 3$  km.

## 5.2 Réfraction atmosphérique

Le trajet optique du rayon lumineux issu du théodolite n'est pas linéaire (fig. 6.9-a.). Il est incurvé vers la terre par le phénomène de réfraction atmosphérique : on peut assimiler l'atmosphère à une succession de couches de densité différente décroissant du sol vers la haute atmosphère ; le rayon lumineux subit alors une déviation vers le sol en chaque point de sa trajectoire.



L'angle de déviation (**angle de réfraction** noté  $r$ ) est fonction de la température et de la pression le long du trajet. L'angle de site réel  $i'$  est :  $i' = i - r$ .



Le rayon de courbure du rayon lumineux (infrarouge, laser) est d'environ six à huit fois le rayon terrestre moyen ( $R' \approx 6,2 \cdot R_N$ ). On définit un **module de réfraction atmosphérique**  $mra$  comme suit :

$$mra = \frac{R_N}{R'} \approx 0,16$$

$mra$  est minimal aux heures les plus chaudes de la journée.

Au niveau de la mer et à 20°C,  $mra \approx 0,16$  : c'est la valeur moyenne habituellement adoptée (fig. 6.9-b.). La valeur moyenne adoptée par le constructeur Leica sur ses appareils électroniques est de 0,13.<sup>1</sup>

Le minimum, de l'ordre de 0,11, étant stable d'un jour à l'autre et atteint aux heures les plus chaudes, c'est à ces moments-là que l'on effectue les longues visées géodésiques, bien qu'à ces moments le pointé soit rendu plus incertain à cause du flamboiement de l'air.

<sup>1</sup> Dans les appareils les plus récents, l'opérateur peut modifier cette valeur.

### 5.2.1 Erreur sur la dénivelée instrumentale

L'opérateur mesure la dénivelée instrumentale  $\Delta h'_i$  alors qu'il devrait mesurer  $\Delta h_i$ . Ceci vient du fait qu'il observe l'angle  $V$  alors qu'il devrait observer l'angle  $(V + r)$  (voir fig. 6.9-a.). L'erreur commise, notée  $r_{\Delta h}$ , est toujours positive et vaut :

$$r_{\Delta h} = mra \frac{Dh_i^2}{2R_N} = \Delta h'_i - \Delta h_i$$

L'expression de la dénivelée instrumentale corrigée est donc la suivante :

$$\Delta h_i = Di \cdot \cos V - r_{\Delta h} = Di \cdot \cos V - mra \frac{Di^2}{2R_N} \sin^2 V$$

### 5.2.2 Erreur sur la distance horizontale

Si l'on assimile l'arc tP à la corde (voir fig. 6.9-a.), l'opérateur mesure la distance horizontale  $th = Di \cdot \sin V$ . Or, il devrait mesurer la distance  $tm = Di \cdot \sin(V + r)$ . On note l'erreur commise  $r_{Dh}$ . Cette erreur est négative si  $V < 100$  gon et positive si  $V > 100$  gon ;

$$\text{elle vaut : } r_{Dh} = -mra \frac{Dh_i^2}{2R_N} \cot V$$

L'expression de la distance horizontale corrigée est donc la suivante :

$$Dh_i = Di \cdot \sin V - r_{Dh} = Di \cdot \sin V + mra \frac{Di^2}{2R_N} \sin V \cdot \cos V$$

### 5.2.3 Applications

#### a) Application 1

Déterminez à partir de quelle portée  $Dh$  l'erreur sur la dénivelée dépasse 1 cm, sachant que  $mra = 0,16$ .

#### Réponse

893 m et 2 cm à partir de  $Dh = 1,26$  km. L'erreur commise sur  $Dh$  est de l'ordre de 2 mm sur 1 000 m pour  $V = 90$  gon.

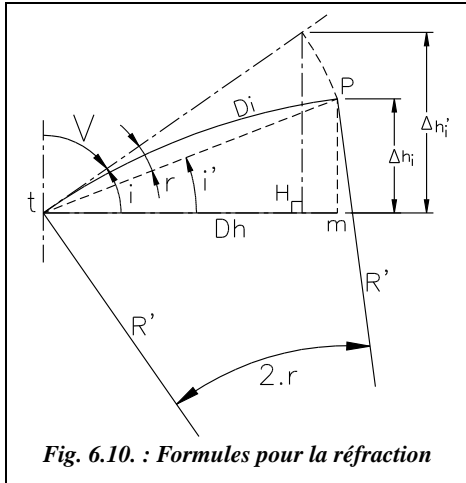
#### b) Application 2

Donnez un ordre de grandeur de l'angle de réfraction  $r$  pour  $Di = 3$  km et  $mra = 0,16$ .

### Réponse

D'après la figure 6.10., on peut écrire :  $Di = 2 \cdot r_{\text{rad}} \cdot R'$  et  $R' = R_N / mra$ .

Donc :  $r_{\text{radians}} = mra \frac{Di}{2R_N}$  soit  $r \approx 2,4 \text{ mgon}$ .



### c) Application

Démontrez les formules des erreurs dues à la réfraction atmosphérique.

### Réponse

On calcule dans un premier temps la **déni-velée** instrumentale. Elle vaut

$$\Delta h_i = Di \cdot \sin(i - r) \text{ soit}$$

$$\Delta h_i = Di \cdot [\sin i \cdot \cos r - \cos i \cdot \sin r].$$

$r$  étant petit,  $\cos r \approx 1$  et  $\sin r \approx r_{\text{rad}}$  et comme  $V = (100 - i)$ , il vient :

$$\Delta h_i \approx Di \cdot [\cos V - r \cdot \sin V].$$

Or nous avons vu que  $mra \cdot R' = R_N$

D'autre part, on constate expérimentalement que l'angle au centre  $2r$  est proportionnel à l'angle au centre  $2\alpha$  (fig. 6.10. et 6.7.), donc :

$$r = mra \cdot \alpha = mra \frac{Dh}{2R_N}, \text{ soit : } r = mra \frac{Di \cdot \sin V}{2R_N}.$$

$$\text{Finalement, on écrit : } \Delta h_i = Di \cdot \cos V - mra \frac{Di^2}{2R_N} \sin^2 V$$

Dans un second temps, on calcule la **distance horizontale**.

La distance horizontale réelle est  $Dh_t = Di \cdot \cos(i - r)$ , c'est-à-dire :

$$Dh_t = Di \cdot [\cos i \cdot \cos r + \sin i \cdot \sin r] \approx Di \cdot [\sin V + \cos V \cdot \sin r].$$

En reportant le résultat précédent, on obtient :  $Dh_t = Di \cdot \sin V + mra \frac{Di^2}{2R_N} \sin V \cdot \cos V$

## 5.3 Correction de niveau apparent

Les erreurs de sphéricité et de réfraction sont généralement considérées ensemble, en une erreur globale nommée **erreur de niveau apparent**. On définit donc la correction de niveau apparent, notée **Cna**, comme la somme des corrections de sphéricité et de réfraction. Ces deux corrections vont toujours en sens inverse l'une de l'autre, mais sont proportionnelles aux mêmes termes. Elles sont donc simples à ajouter.



Les expressions de la dénivelée instrumentale  $\Delta h_i$  et de la distance horizontale réduite à l'horizon du point de station S  $Dh_s$  après correction de niveau apparent :

$$\begin{aligned}\Delta h_i &= Di \cdot \cos V + \frac{(1 - mra)}{2R_N} Di^2 \sin^2 V \\ Dh_s &= Di \cdot \sin V + \frac{(mra - 2)}{2R_N} Di \cdot \sin V \cdot \cos V\end{aligned}$$

Ces formules sont utilisées par les calculateurs des théodolites électroniques qui mesurent  $Di$  ; c'est pourquoi elles sont données en fonction de la distance inclinée  $Di$ . Pour la dénivelée instrumentale  $\Delta h_i$ , on peut préférer l'expression faisant apparaître la distance horizontale  $Dh$  qui est utilisée en nivellement géodésique,  $Dh$  étant déduite de  $Dr$ , elle-même calculée à partir des coordonnées des points.

$$\Delta h_i = Dh \cdot \cotan V + \frac{(1 - mra)}{2R_N} Dh^2$$

On note  $q$  le **coefficient de niveau apparent**, soit :  $q = \frac{1 - mra}{2R_N}$ .

Les corrections sont alors :

- la correction de niveau apparent sur la dénivelée :  $Cna = \frac{(1 - mra)}{2R_N} Dh_i^2$
- la correction sur la distance horizontale :  $C'na = \frac{(mra - 2)}{2R_N} Dh_i^2 \cdot \cotan V$

$Cna$  est toujours positive.

$C'na$  est négative si  $V < 100$  gon et positive si  $V > 100$  gon.

On utilise généralement pour  $Cna$  l'**expression simplifiée** suivante :  $Cna_m = \frac{(Dh_{km})^2}{15,2}$

$Cna$  est exprimée en mètre ;  $Dh$  est exprimée en kilomètres et arrondie au mètre. Le coefficient 15,2 est calculé à partir de  $mra = 0,16$  et  $R_N = 6\,380$  km.

### Remarque

Afin de déterminer directement  $mra$  de manière expérimentale (voir § 5.3.2), le coefficient de niveau apparent peut s'écrire comme suit :

$$q = \frac{1 - mra}{2R_N} = \frac{\alpha - r}{Dh} = \frac{V_A + V_B - 200}{2Dh}$$

### 5.3.1 Applications

#### a) Application 1

Calculez la correction de niveau apparent à apporter aux mesures suivantes :

$Di = 500,145$  m,  $V = 80,3622$  gon.

#### Réponse

La correction sur la distance horizontale est  $C'na = -1,0$  cm donc  $Dh = 476,527$  m ;

la correction sur la dénivelée est  $Cna = 1,5$  cm donc  $\Delta h_i = 151,859$  m.

Dans les stations totales, la prise en compte est automatique et permanente ; elle peut être désactivée. Sur les modèles les plus récents, la valeur de  $mra$  peut être saisie par l'opérateur.

#### b) Application 2

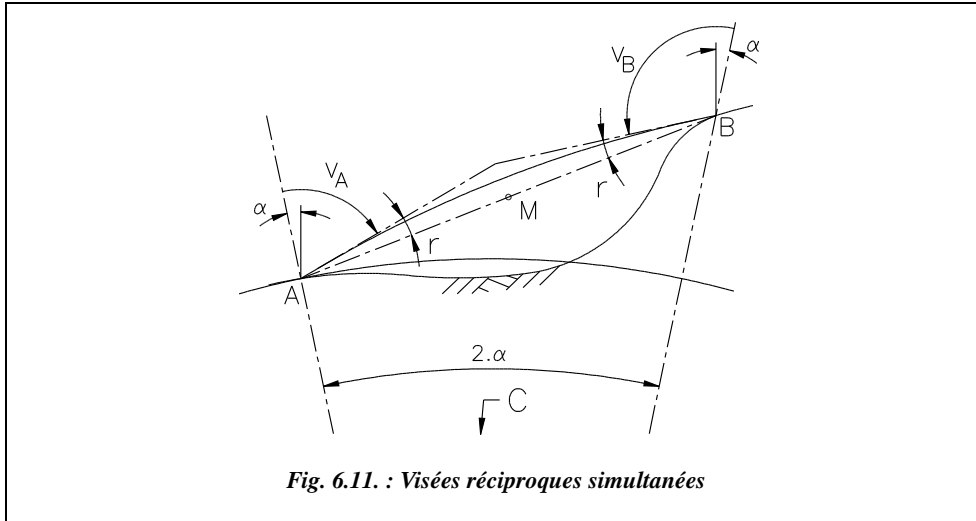
À partir de quelle distance horizontale obtient-on une erreur de 1 cm sur la dénivelée et sur la distance ?

#### Réponse

- Sur la dénivelée instrumentale, on a  $(1 - mra) \cdot Dh^2 / (2R) = 0,01$  d'où  $Dh = 389,7$  m ;
- Sur la distance horizontale, on a  $(mra - 2) \cdot Dh^2 / (2R \cdot \tan V) = -0,01$  m, soit :
  - $Dh = 2101$  m pour  $V = 99$  gon ;
  - $Dh = 939$  m pour  $V = 95$  gon ;
  - $Dh = 662$  m pour  $V = 90$  gon.

### 5.3.2 Détermination expérimentale du module $mra$

Si, lors d'une manipulation, les conditions de température et de pression sont éloignées des valeurs moyennes (pour lesquelles  $mra = 0,16$  est donné), il est possible de déterminer expérimentalement la valeur moyenne de  $mra$  sur le lieu même de la manipulation. Ceci se fait par visées réciproques simultanées (fig. 6.11. : une première visée de A vers B et une seconde de B vers A) de manière à avoir un même coefficient de réfraction atmosphérique pour les deux visées.



La visée doit être suffisamment horizontale pour pouvoir négliger les effets des variations de pression le long du trajet du rayon lumineux. De même, il faut éviter des variations de température et d'humidité, par exemple le passage au dessus d'une surface plus chaude ou plus froide, etc.

On voit sur la figure 6.11., qui superpose les effets de la sphéricité et de la réfraction, que :

$$(V_A - \alpha + r) + (V_B - \alpha + r) = 200 \text{ gon.}$$

M étant le milieu de AB, il s'ensuit que  $\alpha_{radian} = \frac{Dh_M}{2(R_n + H_M)}$

et  $r_{radian} \approx mra \frac{Dh_M}{2(R_N + H_M)}$

On démontre (voir § 6) que :  $Dh_M = Di \cdot \cos\left(\frac{V_B - V_A}{2}\right)$ , distance horizontale réduite à l'horizon du point M.

En toute rigueur,  $H_M$  représente ici la hauteur du point M au-dessus de l'ellipsoïde. Notons que cette hauteur est légèrement différente de l'altitude au-dessus du géoïde (voir chap. 4, § 7.1.4).

En regroupant ces formules, on obtient :

$$mra = 1 + \frac{\pi}{200} \cdot \frac{(R_N + H_M)(200 - V_A - V_B)}{Di \cdot \cos\left(\frac{V_B - V_A}{2}\right)}$$

### Application

À partir des données ci-dessous, déterminez une valeur expérimentale de  $mra$ . Le point A est situé à Antibes et  $H_A = 130,132$  m.

Dans ce tableau,  $Dh$  et  $\Delta h_i$  sont calculées pour chaque visée par  $Dh = Di \cdot \sin V$  et  $\Delta h_i = Di \cdot \cos V$ .

Sta.	Pt visé	$Di$ (m)	$V_{CG}$ (gon)	$V_{CD}$ (gon)	$V_0$ (dmgon)	$V_{moyen}$	$Dh$ (m)	$\Delta h_i$ (m)
A	B	2501,646	98,1414	301,8576	10	98,1419	2500,580	73,005
B	A	2501,650	101,8785	298,1203	12	101,8791	2500,560	-73,830

**La manipulation est effectuée comme suit :** un théodolite est stationné sur chaque point et, au même instant, chaque opérateur vise le centre de l'optique de l'autre théodolite. On mesure ainsi la dénivelée entre les axes des tourillons des deux instruments. Si l'on désire obtenir la dénivelée entre les points stationnés, il suffit d'ajouter la différence de hauteur de station à la dénivelée instrumentale.

La distance inclinée  $Di$  est mesurée ensuite. Notons que la précision sur  $Di$  influe peu sur la connaissance de  $mra$  : on peut arrondir  $Di$  au mètre près, ce qui autorise à prendre indifféremment  $Di$  ou  $Dh$  dans les formules. De même  $R$  pourra être pris à 10 km près.

### Réponse

- L'altitude de A étant de 130,232 m, la dénivelée moyenne  $\Delta H_{AB}$  étant de 73,418 m, il s'ensuit que l'altitude du point milieu M est  $H_M = 166,941$  m. Ce point étant situé à Antibes, lieu où le Géoïde est à environ 8 m au-dessus de l'ellipsoïde, on utilisera dans le calcul la valeur  $H_M = 175$  m (en fait,  $H$  ayant très peu d'influence sur  $mra$ , on peut donner  $H_M$  à 50 m près).
- On retrouve  $mra = 0,16$  à partir des valeurs du tableau et en prenant  $Di = 2,5$  km. Notez que l'on retrouve le même résultat si l'on néglige la hauteur du point A au-dessus de l'ellipsoïde, très inférieure à  $R_N$ .
- On en déduit la distance horizontale AB et la dénivelée AB après correction de niveau apparent, soit

depuis A :

$$Dh_{AB} = 2\,500,58 - 0,026 = 2\,500,554 \text{ m}$$

$$\Delta H_{AB} = 73,005 + 0,412 = 73,417 \text{ m}$$

depuis B :

$$Dh_{BA} = 2\,500,560 + 0,027 = 2\,500,587 \text{ m}$$

$$\Delta H_{BA} = -73,830 + 0,412 = -73,418 \text{ m}$$

Les valeurs moyennes sont :  $Dh_{AB} = 2\,500,571$  m et  $\Delta H_{AB} = 73,418$  m.

Les valeurs moyennes issues du tableau, calculées sans correction de niveau apparent sont identiques aux arrondis près :  $Dh_{AB} = 2\,500,570$  m et  $\Delta H_{AB} = 73,418$  m.

À titre indicatif, on peut calculer les valeurs de  $r$  et de  $\alpha$  pour cette visée :  $r \approx 20$  dmgon et  $\alpha \approx 125$  dmgon.

**En conclusions**, les moyennes des valeurs non corrigées éliminent les erreurs de niveau apparent.

On vérifie sur les valeurs numériques que l'erreur de niveau apparent est plus importante en dénivelée, environ 41 cm, qu'en distance, environ 3 cm.

On obtient une très bonne approximation de la correction sur la dénivelée en utilisant la formule approchée suivante :  $Dh_{km}^2/15,2 = 0,411$  m.

L'ordre de grandeur de  $r$  est comparable à l'erreur d'index calculée  $V_0$ , ce qui indique qu'il faut apporter un très grand soin aux mesures et aux mises en station pour obtenir réellement la valeur de  $mra$ .

Une étude de la sensibilité de la formule donnant  $mra$  en fonction des différents paramètres mesurés permet de vérifier que le paramètre prépondérant est la différence ( $V_B - V_A$ ), qui doit donc être mesurée très précisément, au décimilligrade près.

## 6 NIVELLEMENT INDIRECT SUR DE LONGUES PORTÉES

Ce sont les portées supérieures à 1 500 m.

Sur de telles portées, les visées seront réciproques afin d'éliminer l'erreur de niveau apparent. L'arrêté du 21 janvier 1980 fixant les tolérances à appliquer aux canevas topographiques impose des visées réciproques pour toute détermination d'altitude par nivellement indirect ; ces visées pourront être simultanées ou non.

Si le point visé n'est pas stationnable, il sera visé depuis au moins trois autres points connus avec des visées ne dépassant pas 2 km.

L'opérateur stationne en A et vise le point B. En raisonnant toujours sur la dénivelée instrumentale, il lit l'angle zénithal  $V_A$  et la distance inclinée  $Di$  (fig. 6.12.). L'opérateur stationne ensuite en B et vise A ; il lit  $V_B$  et  $Di$ .

La distance  $Di$  finale est la moyenne des deux lectures indépendantes.

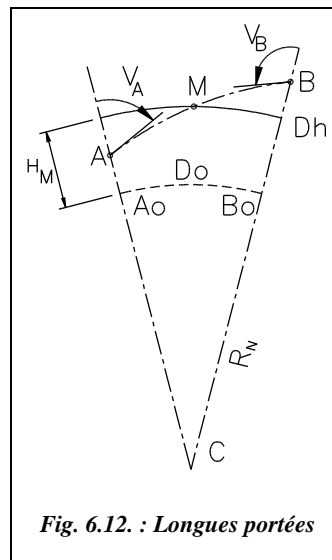


Fig. 6.12. : Longues portées

Les formules à appliquer sont les suivantes :

- Si l'on mesure la distance inclinée  $Di$  :

$$\Delta h_{iA \rightarrow B} = Di \cdot \sin \left( \frac{V_B - V_A}{2} \right)$$

La distance horizontale à l'altitude moyenne de M est :

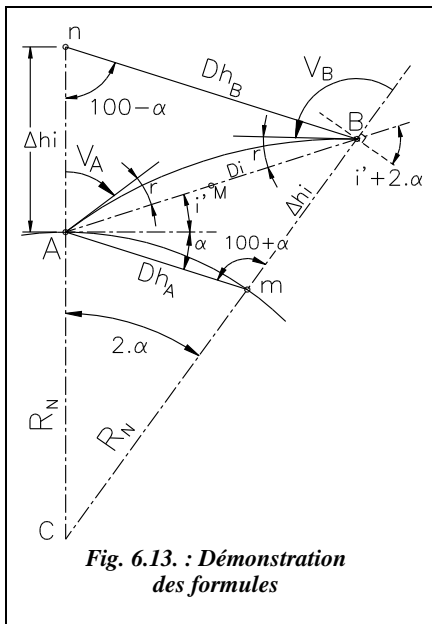
$$Dh_{AB} = Di \cdot \cos \left( \frac{V_B - V_A}{2} \right)$$

- Si l'on déduit la distance  $Dh$  des coordonnées de A et B (nivellement indirect géodésique), on calcule généralement la distance horizontale  $Dh_{AB}$  à l'altitude moyenne entre A et B (altitude  $H_M$  du point M au-dessus de l'ellipsoïde (voir la démonstration au chap. 4, § 7.1 et 7.2) :

$$\Delta h_{iA \rightarrow B} = Dh_{AB} \cdot \tan \left( \frac{V_B - V_A}{2} \right)$$

$Dr$ , distance réduite à la projection, est déduite des coordonnées de A et de B.

$Do$ , distance réduite à l'ellipsoïde, est calculée à partir de  $Dr$ , puis  $Dh$  à partir de  $Do$  (voir le rappel des formules au § 2).



Démontrons les formules de  $Dh_{AB}$  et  $\Delta h_{iAB}$ .

a. Pour la formule donnant  $Dh_{AB}$ , on reprend les formules du paragraphe 5.1.3.1. avec un angle de site corrigé de la réfraction ( $i' = i - r$ ). On obtient alors (fig. 6.13.) :

$$Dh_A = Di \frac{\cos(i' + 2\alpha)}{\cos \alpha}$$

$$\text{et } Dh_B = Di \frac{\cos i'}{\cos \alpha}$$

$$\text{soit } Dh_A = Di \frac{\cos i' \cdot \cos 2\alpha - \sin i' \cdot \sin 2\alpha}{\cos \alpha}$$

$$Dh_A = Di$$

$$\frac{\cos i' (2 \cos^2 \alpha - 1) - \sin i' \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha},$$

$$Dh_A = Di$$

$$\left[ 2(\cos i' \cdot \cos \alpha - \sin i' \cdot \sin \alpha) - \frac{\cos i'}{\cos \alpha} \right],$$

$$Dh_A = 2Di \cdot \cos(i' + \alpha) - Dh_B.$$

$$\text{Donc : } Dh_{AB} = \frac{Dh_A + Dh_B}{2} = Di \cdot \cos(i' + \alpha).$$

Sur la figure 6.13. on voit que :  $i' = i - r = 100 - V_A - r$  et  $i' + 2.\alpha = V_B + r - 100$ .

Par addition, on obtient :  $2(i' + \alpha) = V_B - V_A$  soit  $i' + \alpha = \frac{V_B - V_A}{2}$

Finalement, on obtient la formule exacte suivante :  $Dh_{AB} = Di \cos\left(\frac{V_B - V_A}{2}\right)$ .

**b.** La formule donnant  $\Delta h_i$  est démontrée ainsi :  $\Delta h_i = Di \frac{\sin(i' + \alpha)}{\cos \alpha} = Dh_{AB} \frac{\tan(i' + \alpha)}{\cos \alpha}$

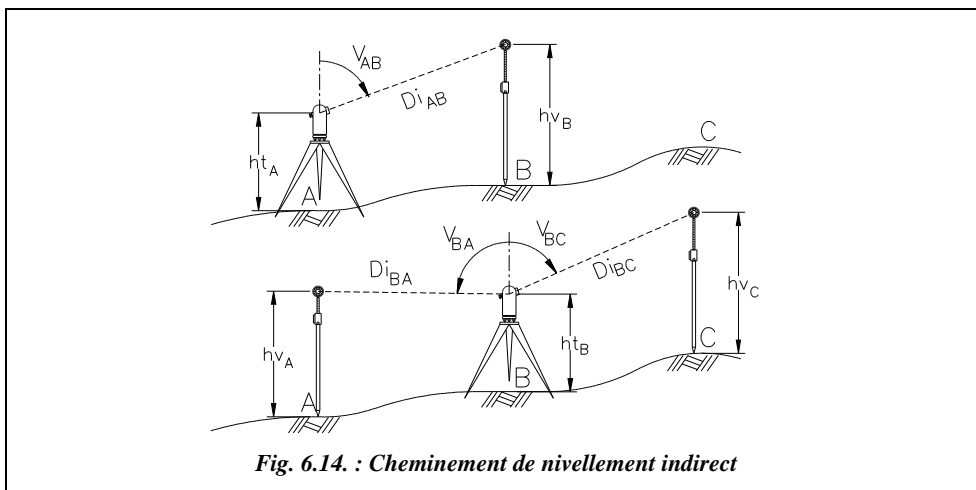
Considérons que  $\alpha$  est petit, alors  $\cos \alpha \approx 1$  et l'on obtient la formule approchée suivante :

$$\Delta h_i \approx Dh_{AB} \cdot \tan \frac{(V_B - V_A)}{2} = Di \cdot \sin \frac{(V_B - V_A)}{2}.$$

## 7 CHEMINEMENTS EN NIVELLEMENT INDIRECT

Sur le terrain, le nivellement indirect reste dans son principe général identique au nivellement direct. Les parcours effectués sont des cheminements mixtes encadrés ou fermés sur lesquels on calcule l'erreur de fermeture altimétrique  $f_H$  qui est ensuite répartie sur les dénivelées du parcours (voir le chapitre 5, § 1.5 et § 1.6).

La tolérance sur la fermeture est  $T = \sqrt{\Sigma T_i^2}$ ,  $T_i$  étant la tolérance sur l'écart entre deux déterminations indépendantes de chaque dénivelée (visées réciproques, voir les formules réglementaires au paragraphe 9.) La seule différence réside dans le fait que chaque sommet du parcours est stationné et que l'on peut ainsi faire des visées réciproques pour obtenir des moyennes sur les mesures... sauf pour les points rayonnés (fig. 6.14.).



Les dénivelées se calculent de proche en proche.

La distance horizontale entre A et B à l'altitude moyenne entre A et B est donnée par :

$$Dh_{AB} = \frac{Di_{AB} \cdot \sin V_{AB} + Di_{BA} \cdot \sin V_{BA}}{2}$$

$$\text{donc : } \Delta H_{AB} = ht_A - hv_B + Di \cdot \cos V_{AB} + Cna$$

$$\text{soit : } \Delta H_{BA} = ht_B - hv_A + Di \cdot \cos V_{BA} + Cna$$

$$\text{finalement : } \Delta H_{A \rightarrow B} = \frac{ht_A - ht_B}{2} - \frac{hv_B - hv_A}{2} + \frac{Di}{2} (\cos V_{AB} - \cos V_{BA}).$$

En pratique, on calcule chaque dénivelée et on en fait la moyenne (voir exemple de carnet

de terrain § 8) : la dénivelée de A vers B est :  $\Delta H_{A \rightarrow B} = \frac{\Delta H_{AB} - \Delta H_{BA}}{2}$ .

Remarquez que  $\Delta H_{AB}$  est de signe opposé à  $\Delta H_{BA}$ .

#### Remarque

Si à chaque station  $ht = hv$ , alors on peut écrire :

$$Dh_{AB} = Di \cdot \cos\left(\frac{V_{AB} - V_{BA}}{2}\right) \text{ et } \Delta H = Di \cdot \sin\left(\frac{V_{AB} - V_{BA}}{2}\right)$$

Dans le cas de visées réciproques, on peut négliger la correction de niveau apparent puisqu'elle s'élimine dans le calcul de la dénivelée moyenne (voir les calculs ci-dessus et l'exemple du § 5.3.2).

## 8

## EXEMPLES DE NIVELLEMENT INDIRECT

Dans les tableaux suivants, les corrections de niveau apparent sont indiquées pour calculer chaque dénivelée (et pour obtenir un ordre de grandeur). En fait, ces corrections s'éliminent dans la dénivelée moyenne.

De même, les corrections de niveau apparent sur les distances s'éliminent dans la moyenne : elles sont de signe opposé puisque, lors de visées réciproques, si l'angle  $V$  est supérieur à 100 gon pour la visée aller, il devient inférieur à 100 gon pour la visée retour. Ceci est vrai à l'erreur de niveau apparent près : en effet, pour deux visées très proches de l'horizontale, on peut obtenir deux angles  $V$  supérieurs à 100 gon ou deux angles  $V$  inférieurs à 100 gon. Ceci dépend également des hauteurs relatives de station et de voyant.



## 8.1 Exemple de nivellement indirect trigonométrique

L'altitude de départ est  $H_{54} = 130,232$  m. L'altitude d'arrivée est  $H_3 = 227,482$  m.

Les tolérances calculées s'appliquent à l'écart entre deux déterminations d'une même dénivelée (voir la formule au § 9). Ces tolérances sont calculées pour des visées réciproques simultanées bien qu'elles ne le soient pas toutes.

Les corrections de niveau apparent sont calculées avec la formule simplifiée  $Dh^2/15,2$ . Il est possible de vérifier que le résultat reste identique au millimètre près en utilisant les formules complètes.

Le tableau suivant reprend le carnet de terrain du nivellement indirect trigonométrique du cheminement 54-2-31-32-33-64-3 encadré entre les deux repères 54 et 3 ;

Sta	Pt. vis.	ht hv m	Di m	$V_{CG}$ $V_{CD}$ gon	V gon	Dh moy. m	Cna mm	$\Delta H$ (m) moy. Ecart / Tol (cm)	Di moy. m	Comp. * mm	Altitude m
54	2	1,67 1,7	512,653	98,2427 301,7373	98,2527		17	14,061		-11	130,232
2	54	1,72 1,7	512,642	101,7456 298,2424	101,7516	512,454	17	1,0 / 3,8	512,648		144,282
	31	1,72 1,7	487,414	96,7032 303,2768	96,7132		16	25,194		-10	
31	2	1,67 1,7	487,422	103,2849 296,7031	103,2909	486,768	16	1,0 / 3,7	487,418		169,466
	32	1,67 1,7	624,241	98,1287 301,8513	98,1387		26	18,254		-13	
32	31	1,71 1,7	624,253	101,8605 298,1275	101,8665	623,979	26	2,0 / 4,4	624,247		187,708
	33	1,71 1,7	702,884	98,3176 301,6624	98,3276		33	18,520		-15	
33	32	1,66 1,7	702,863	101,6723 298,3157	101,6783	702,630	33	3,0 / 4,9	702,874		206,213
	64	1,66 1,7	538,868	99,9759 300,0041	99,9859		19	0,113		-11	
64	33	1,71 1,7	538,866	100,0126 299,9754	100,0186	538,867	19	3,0 / 4,0	538,867		206,315
	3	1,71 1,7	412,036	96,7193 303,2607	96,7293		11	21,176		-9	
3	64	1,70 1,7	412,045	103,2682 296,7198	103,2742	411,496	11	1,0 / 3,3	412,041		227,482
	$\Sigma$							97,048	3 278,09	-69	
								$f_H =$	6,9	cm	
								Tol. :	9,9	cm	

\* compensation

Tous les écarts, colonne Écarts/tolérances données en centimètre, et la fermeture sont dans la limite des tolérances.

La distance inclinée  $Di$  moyenne est calculée à partir de la distance horizontale  $Dh$  moyenne et de la dénivelée  $\Delta H$  moyenne. Elle sert à la répartition des compensations. L'écart de fermeture est réparti **proportionnellement aux longueurs de visée**, plus logique que proportionnellement aux valeurs absolues des dénivelées (méthode usuelle).

## 8.2 Exemple de nivellement indirect géodésique

Les tableaux suivants détaillent le calcul du cheminement encadré 64-65-66-67-68.

L'altitude de départ est  $H_{64} = 325,461$  m. L'altitude d'arrivée est  $H_{68} = 551,370$  m

Sta	Pt. vis.	E (m) N (m)	Dr m	kr cm/ km	Do m	$H_M$ m	Dh m	$V_{CG}$ (gon) $V_{CD}$ (gon)	$V_0$ dmgon	Vmoyen gon
64	65	982 143,214 156 441,142	947,204			325		94,1321 305,8675	4	94,1323
65	64	983 065,364 156 657,554	947,204	-8,6	947,285	369	947,346	105,8757 294,1236	7	105,8761
	66		1115,040					96,2971 303,7021	8	96,2975
66	65	983 745,441 157 541,188	1115,040	-8,7	1115,137	446	1115,192	103,7118 296,2875	7	103,7122
	67		1197,349					98,1519 301,8477	4	98,1521
67	66	984 872,358 157 945,789	1197,349	-8,8	1197,454	496	1197,500	101,8578 298,1418	4	101,858
	68		955,360					97,4523 302,5473	4	97,4525
68	67	985 475,665 158 686,554	955,360	-8,8	955,444	532	955,476	102,5555 297,4438	7	102,5559

Sta	Pt. visé	Dh m	Vmoyen gon	mra	Cna mm	$\Delta H$ m	Tol. (cm) Écarts	$\Delta H$ m	Comp m	Altitude m
64	65		94,1323	0,11	59	87,623	6,4			325,461
65	64	947,346	105,8761		59	-87,631	-0,7	87,627	0,021	413,107
	66		96,2975	0,13	82	65,034	7,4			
66	65	1 115,192	103,7122		82	-65,019	-0,6	65,067	0,021	478,154
	67		98,1521	0,15	94	34,864	7,9			
67	66	1 197,500	101,8580		94	-34,865	-0,1	34,864	0,021	513,033
	68		97,4525	0,12	60	38,315	6,4			
68	67	955,476	102,5559		60	-38,320	-0,5	38,318	0,021	551,370
$\Sigma$		4 215,514						225,859	0,084	
							$f_H =$	-8,4	cm	
							Tol. :	14,1	cm	

### Remarque

- La distance réduite  $Dr$  est déduite des coordonnées des points stationnés. Elle est déduite de  $Do$  distance « au niveau zéro »  $Do = Dr/(1+kr)$  elle-même déduite de  $Dh$  distance horizontale « au niveau de la visée »  $Dh = Do.(1+H_M/R_N)$ .
- Les visées sont réciproques et simultanées ; on travaille en canevas de précision (zone III).
- L'altitude d'un point M milieu de AB est calculée au mètre près par la relation suivante :  $H_M = H_A + Do / \tan (V_A/2)$  ou  $Do . \cot (V_A/2)$ .
- Pour toutes les mesures, la hauteur du voyant est égale à la hauteur des tourillons.
- $kr$  représente le **coefficient d'altération linéaire**. Manuellement, il est déterminé par interpolation dans le tableau donné au chapitre 4, paragraphe 7.1. On le détermine à partir des coordonnées du point milieu de chaque visée (coordonnées arrondies au kilomètre en  $X$  et à 100 m en  $Y$ ).
- $mra$  est calculé à titre d'information : sa valeur est proche de la valeur moyenne 0,16.
- $\Delta H = Di.\cos V + Cna$  est calculée pour chaque visée de manière à déterminer l'écart entre deux déterminations indépendantes. Cet écart calculé en centimètres est à comparer à la tolérance (colonne  $Tol.$ ) donnée en centimètres.
- La colonne  $\Delta H$  faisant apparaître la dénivelée moyenne peut être directement calculée avec la formule :  $\Delta H = Dh.\tan[(V_B - V_A)/2]$  car à chaque visée  $ht = hv$ , la dénivelée instrumentale est aussi la dénivelée réelle.



Les tableaux NIVINDG.XLS et NIVINDT.XLS permettent d'effectuer ces calculs.

## 9

## TOLÉRANCES RÉGLEMENTAIRES EN NIVELLEMENT INDIRECT

Ces tolérances sont extraites de l'arrêté du 21 janvier 1980 fixant les tolérances applicables aux levés à grande échelle entrepris par les services publics. Elles peuvent être utilisées à titre indicatif pour les travaux courants.

Chacune des tolérances  $Ti$  suivantes s'applique à l'écart entre deux déterminations indépendantes d'une même dénivelée par visées réciproques. La tolérance sur le cheminement complet sera la suivante (voir l'article III B 2 de l'arrêté de janvier 1980) :

$$T = \sqrt{\sum Ti^2}$$

## 9.1 Dénivelée calculée à partir de la distance horizontale

La dénivelée est donnée par :  $\Delta H = ht - hv + Dh \cdot \cot V + Cna = ht - hv + Dh \cdot \tan i + Cna$   
avec  $Cna = q \cdot Dh^2$ . En dérivant et en composant quadratiquement, il vient :

$$T_{\Delta H}^2 = A^2 + (T_{Dh} \cdot \tan i)^2 + Dh \cdot (1 + \tan^2 i) \cdot T_i^2 + T_q^2 \cdot Dh^4$$

La tolérance sur la mesure d'une dénivelée est :

$$T_{\Delta H} = \sqrt{A^2 + T_{Dh}^2 \cdot \tan^2 i + (1 + \tan^2 i)^2 Dh^2 \cdot T_i^2 + Dh^4 \cdot T_q^2} \text{ où :}$$

- $A$  est un terme constant : connaissance du point de station, de  $ht$ ,  $hv$  et tenue du miroir (ou de la mire) ;
- $i$  est l'angle de site ( $i = 100 - V$ ) et  $T_i$  est la tolérance sur la mesure de l'angle  $i$  ;
- $Dh$  est la distance horizontale de la visée calculée à partir des coordonnées des points à l'altitude moyenne entre station et point visé (déduite de  $Do$  ; voir les calculs au § 2) ;
- $T_{Dh}$  est la tolérance sur la connaissance de  $Dh$  : 4 cm en canevas de précision, 20 cm en canevas ordinaire ;
- $T_q$  est la tolérance sur la connaissance de la correction de niveau apparent (§ 5.3).

## 9.2 Dénivelée calculée à partir d'une mesure de distance inclinée

La dénivelée est  $\Delta H = ht - hv + Di \cdot \cos V + Cna = ht - hv + Di \cdot \sin i + Cna$ .

La tolérance sur la mesure d'une dénivelée est la suivante :

$$T_{\Delta H} = \sqrt{A^2 + T_{Di}^2 \cdot \sin^2 i + \cos^2 i \cdot Di^2 \cdot T_i^2 + Dh^4 \cdot T_q^2}$$

- $T_{Di}$  (cm) vaut  $3 + Di_{\text{km}}$  si l'on utilise un distancemètre ;
- les autres termes sont identiques à ceux du paragraphe 9.1. ;
- le terme de correction de niveau apparent n'est pas dérivé  $Dh = Di \cdot \sin V$  car, expérimentalement, la correction de niveau apparent est proportionnelle à la distance horizontale  $Dh$ .

## 9.3 Tableaux récapitulatifs

Ces tableaux (§ 9.3.1 et 9.3.2) fournissent des formules adaptées aux différents cas de mesure : visées unilatérales, réciproques simultanées ou non. Ils sont établis avec les valeurs suivantes (les tolérances sont données en centimètre) :

- $A = 2$  cm (tenue du voyant ou de la mire et connaissance de  $ht$  et  $hv$ ).

- $T_{Dh} = 4 \text{ cm}, 20 \text{ cm}, (3 + Dh_{\text{km}})$  suivant le cas.
- $T_q = 1 \text{ cm}$ .
- $T_i = 5,6 \text{ mgon}$  pour une visée unilatérale.
- $Dh$  et  $Di$  sont exprimés en kilomètres.

#### Remarque

- Pour des visées réciproques, l'angle vertical est mesuré deux fois ; donc la tolérance  $T_{Dh}$  est divisé par  $\sqrt{2}$ .
- Pour des visées réciproques non simultanées, l'erreur due à la connaissance du coefficient de correction de niveau apparent est divisée par  $\sqrt{2}$ . Pour des visées réciproques simultanées, elle est divisée par deux.

### 9.3.1 Dénivelée déduite de la distance inclinée mesurée

Visées	Tolérances en centimètre
unilatérales	$\sqrt{4 + (3 + Di)^2 \sin^2 i + 80 Di^2 \cdot \cos^2 i + Dh^4}$
réciproques non simultanées	$\sqrt{4 + (3 + Di)^2 \sin^2 i + 40 Di^2 \cdot \cos^2 i + \frac{Dh^4}{2}}$
réciproques simultanées	$\sqrt{4 + (3 + Di)^2 \sin^2 i + 40 Di^2 \cdot \cos^2 i + \frac{Dh^4}{4}}$

Le coefficient  $\sqrt{80}$  se détaille ainsi :

- transformation de 5,6 mgon en radians ( $5,6 \cdot \pi / 200 / 1000$ ) ;
- coefficient pour passer  $Di$  en kilomètres et obtenir un résultat en centimètres :  $10^5$  ;
- on obtient  $\sqrt{77,4}$  arrondi à  $\sqrt{80}$ .

Le terme  $\sqrt{40}$  est issu de  $\sqrt{(80/2)}$  puisque l'on double le nombre de visées.

### 9.3.2

#### Dénivelée déduite de la distance horizontale issue des coordonnées

Les tolérances en centimètres sont les suivantes :

Visées	Tolérances en centimètre
unilatérales	$\sqrt{4 + 16 \tan^2 i + 40 Dh^2 (1 + \tan^2 i)^2 + Dh^4}$
réiproques non simultanées	$\sqrt{4 + 16 \tan^2 i + 40 Dh^2 (1 + \tan^2 i)^2 + \frac{Dh^4}{2}}$
réiproques simultanées	$\sqrt{4 + 16 \tan^2 i + 40 Dh^2 (1 + \tan^2 i)^2 + \frac{Dh^4}{4}}$

Visées	Tolérances en centimètre
unilatérales	$\sqrt{4 + 400 \tan^2 i + 80 Dh^2 (1 + \tan^2 i)^2 + Dh^4}$
réiproques non simultanées	$\sqrt{4 + 400 \tan^2 i + 40 Dh^2 (1 + \tan^2 i)^2 + \frac{Dh^4}{2}}$
réiproques simultanées	$\sqrt{4 + 400 \tan^2 i + 40 Dh^2 (1 + \tan^2 i)^2 + \frac{Dh^4}{4}}$